Devoir maison n$^{\text{o}}$ 4

À rendre le mardi 14 octobre

Extrait d'un rapport du jury du CCINP : « *Le futur candidat doit s'appliquer à donner tous les arguments, même simples, conduisant à une conclusion. Nous lui conseillons de s'approprier petit à petit le cours par la pratique des exercices et des problèmes, de travailler les techniques habituelles et surtout de s'entraîner régulièrement à rédiger des questions de manière claire, explicite et structurée.* »

Exercice 1. Une suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} (\tan x)^n \,\mathrm{d}x$.

Q1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Q2. Étudier les variations de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Q3. À l'aide des deux questions précédentes, déterminer, pour $n \geqslant 2$, un encadrement de $2I_n$. En déduire un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Q4. Étudier selon la valeur du réel α, la nature de la série $\sum n^\alpha I_n$.

Q5. ★ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{2n+1} = \dfrac{(-1)^n}{2} \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$.

Exercice 2. Deux calculs d'une même intégrale

On s'intéresse à l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{(1+x^2)^2} \,\mathrm{d}x$.

Q6. Justifier que I est convergente.

Q7. *Méthode 1* : Calculer I à l'aide du changement de variable $x = \tan t$.

Q8. *Méthode 2* : Justifier la convergence de $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{x^2}{(1+x^2)^2} \,\mathrm{d}x$ puis, à l'aide d'une intégration par parties, la calculer. En déduire la valeur de I.

Exercice 3. ★ Calcul de l'intégrale de Dirichlet

Le but de cet exercice est de calculer la valeur de l'intégrale de Dirichlet $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t$ dont on a montré la convergence en TD (on pourra utiliser ce fait sans le redémontrer).

Q9. Montrer que la fonction $f : t \mapsto \begin{cases} \frac{\cos t}{\sin t} - \frac{1}{t} & \text{si } 0 < t \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{si } t = 0, \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Q10. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \dfrac{\sin(2nt)\cos(t)}{\sin(t)} \,\mathrm{d}t$. Déterminer la valeur de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q11. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a\,;b]$ de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^b g(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Q12. En déduire la valeur de I.